# Kleine Mathezusammenfassung

Cornelius Poth

21. Januar 2008

Dieses Dokument habe ich zum einen erstellt um ein wenig LaTeXzu lernen bzw. zu üben und natürlich auch um mich mit Mathe auseinander zu setzten. Ich möchte darauf hinweisen, dass evtl. einige Dinge nicht zu 100% mathematisch korrekt geschrieben oder beschrieben sind. Allerdings kann genau das ein Vorteil für Schüler oder Studenten sein um Dinge besser zu verstehen.

Grundsätzlich gilt allerdings: Keine Gewähr auf Richtigkeit! Wer Fehler findet oder Verbesserungsvorschläge hat kann (und soll) mich geren darauf hinweisen, am besten mit einer netten E-Mail an kontakt (a) cpoth.de
(Adresse nicht richtig ausgeschrieben um mich vor Spam zu schützen!)

Bitte beachten: Rechtschreibfehler sind absichtlich eingefügt und dienen der Unterhaltung des Lesers.

www.cpoth.de

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundrechenregeln

## 1.1 Wurzeln

### 1.1.1 Rechenregeln

Produkt : $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

Quotient : $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Potenz : $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Wurzel : $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

## 1.2 Potenzen

### 1.2.1 Definitionen

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

### 1.2.2 Rechenregeln

Produkt : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

Quotient : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Potenz : $(a^m)^n = a^{mn}$

## 1.3 Logarithmen

### 1.3.1 Definitionen

$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$

Logarithmus Naturalis : $\log_e a = \ln a$

$$a = e^x \Leftrightarrow x = \ln a$$

Dekadischer Logarithmus : $\log_{10} a = \lg a$

$$a = 10^x \Leftrightarrow x = \lg a$$

### 1.3.2 Rechenregeln

$\log_n ab = \log_n a + \log_n b$

$\log_n \frac{a}{b} = \log_n a - \log_n b$

$\log_n a^b = b \cdot \log_n a$

$\log_n \sqrt[b]{a} = \frac{1}{b} \cdot \log_n a$

### 1.3.3 Basisumrechnung

Zur Eingabe in Taschenrechner z. B. wenn der Rechner nur $ln$ oder $log_{10}$ kann:

$\log_n a = \frac{\log_x a}{\log_x n}$

# 2 Trigeometrie

## 2.1 Beziehungen zwischen trigeometrischen Funktionen

### 2.1.1 Zusammenhang zwischen sin und cos

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

### 2.1.2 Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

### 2.1.3 Definition des Tangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

### 2.1.4 Weitere wichtige Zusammenhänge

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$$
$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$$

## 2.2 Additionstheoreme

$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2$
$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \mp \sin x_1 \cdot \sin x_2$
$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \mp \tan x_1 \cdot \tan x_2}$

# 3 Hyperbelfunktionen

Definitionen:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

## 3.1 Beziehungen zwischen Hyperbelfunktionen

### 3.1.1 Hyperbolischer Pythagoras

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

### 3.1.2 Definition des Tangenshyperbolikus

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

# 4 Lineare Algebra

## 4.1 Definitionen

### 4.1.1 Nullmatrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

### 4.1.2 Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

## 4.2 Rechenregeln für Matrizen, Matrixrechenregeln

### 4.2.1 Additionsregeln und Regeln für die Multiplikation mit einem Zahl

Für festes $m$, $n$ und für $A$, $B$ sind $(m, n)$-Matrizen und $\mu$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. $A + B = B + A$
3. $N + A = A$ “neutrales Element der Addition”
4. $\exists \widetilde{A}$ mit $A + \widetilde{A} = E$
5. $(\mu \cdot \lambda)A = \lambda(\mu A)$
6. $(\mu + \lambda)A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
8. $1 \cdot A = A$

### 4.2.2 Multiplikationsregeln und Potenzregeln

Für festes $m$, $n$ und für $A$, $B$, $C$ sind $(m, n)$-Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $AE = A$ “neutrales Element der Multiplikation”
3. $A(B + C) = AB + AC$

4. $(A+B)C = AC + BC$
5. $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
6. $(AB)^t = A^t \cdot B^t$

## 4.3 Determinanten

Definition:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ergebnis ist eine reelle Zahl.

### 4.3.1 Berechnung von 2-reihigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

### 4.3.2 Berechnung von 3-reihigen Determinanten

"Satz von Sarrus"

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

### 4.3.3 Berechnung von n-reihigen Determinanten

Definition: Der Wert einer n-reihigen Determinante wird mit Hilfe der "Entwicklungsformel" berechnet. Z. B. Entwicklung nach der 1. Zeile:

$$D = \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{1k}$$

Vorzeichen zur Addierung der Unterdeterminanten wird nach der Schachbrettregel bestimmt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $+$ | $-$ | $+$ | $\cdots$ |
| $-$ | $+$ | $-$ | $\cdots$ |
| $+$ | $-$ | $+$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |

### 4.3.4 Beispiel zur Berechnung von n-reihigen Determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Kann durch elementare Zeilenumformung auf folgende Form gebracht werden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & -8 & -2 & 0 \\ 0 & -17 & -2 & -8 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Es empfiehlt sich nach der ersten Spalte und vierten Zeile zu entwickeln. Man streiche die erste Spalte und vierte Zeile und berechne die Determinante der “Rest-Matrix“.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 8 \\ -8 & -2 & 0 \\ -17 & -2 & -8 \end{vmatrix} = -192$$

Dieses Ergebnis muss noch mit dem Faktor multipliziert werden der in Spalte eins, Zeile vier steht. Nach der Schachbrettregel hat dieser Faktor ein negatives Vorzeichen:

$$-1 \cdot (-192) = 192$$

## 4.4 Inverse einer Matrix

Die Inverse einer Matrix ist wie folgt definiert:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

dabei ist E die Einheitsmatrix.

### 4.4.1 Bestimmen der Inversen Matrix mit Gauß

Man schreibt die zu invertierende Matrix $A$ zusammen mit der Einheitsmatrix $E$ in folgender Form auf:

$$(A|E)$$

Mit dem Gauß algorithmus ”vertauscht”man beide Seiten so das später links die Einheitsmatrix $E$ steht. Rechts steht dann $A^{-1}$:

$$(E|A^{-1})$$

### 4.4.2 Formeln zum schnellen bestimmen von Inversen

Für die 2x2-Matrix gilt folgende Formel:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Quelle: wikipedia.org

Für die 3x3-Matrix gilt folgende Formel:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Quelle: wikipedia.org

## 4.5 Unterräume von Vektorräumen

Eine Teilmenge $U$ eines Vektrorraumes $V$ über $\mathbb{R}$ heißt Unter(vektor)raum von V falls gilt:

1. $U \neq \varnothing$
2. $\forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in U$ ist $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in U$
3. $\forall \lambda \in U, \forall \overrightarrow{a} \in U : \lambda \overrightarrow{a} \in U$

### 4.5.1 Beispiel

Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$

1. $U \neq \varnothing$, da z. B. $(0, 0, 0) \in U$
2. Sei $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in U$ beliebig aber fest, d. h.:
   $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, mit $a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$ und
   $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, mit $b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$
   Nun gilt: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1) - 2 \cdot (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = \underbrace{a_1 - 2a_2 + a_3}_{=0} + \underbrace{b_1 - 2b_2 + b_3}_{=0} = 0$
3. $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\overrightarrow{a} \in U$ mit $a_1 - 2a_2 + a_3 = 0$
   $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = \lambda \cdot \underbrace{(a_1 - 2a_2 + a_3)}_{=0 \text{ nach Vorraussetzung}} = \lambda \cdot 0 = 0$

Bedingung 1. - 3. sind erfüllt $\Rightarrow U$ ist also Unterraum von $V$

## 4.6 Eigenwertprobleme

### 4.6.1 Berechnen von Eigenwerten

Sei M eine (n×n)-Matrix, z. B. (3×3): $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Eigenwerte berechnen sich wie folgt (charakteristisches Polynom):

$$\det(M - \lambda E) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Alle $\lambda$ für die die Determinante Null wird sind Eigenwerte. Ist ein $\lambda$ eine "einfache" Nullstelle hat dieser Eigenwert die algebraische Vielfachheit eins. Ist $\lambda$ eine "doppelte" Nullstelle, hat dieser Eigenwert alg. Vielfachheit zwei usw.

> Ein Eigenwert $\lambda$ der Matrix M hat die algebraische Vielfachheit $k$, wenn er als Nullstelle des charakteristischen Polynoms die Vielfachheit $k$ hat.
>
> [Mathe-Mitschrift Ames]

### 4.6.2 Berechnen von Eigenvektoren

Seien $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_i$ Eigenwerte einer Matrix M. Man setzt nun alle $\lambda_i$ nacheinander in folgende Gleichung ein:

$$(M - \lambda E)\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$$

Man erhält so Vektoren $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$,..., $\overrightarrow{x_i}$, die Eigenvektoren heißen. Eigenvektoren sind nie Nullvektoren.
Die geometrische Vielfachheit entspricht der maximal möglichen linear unabhängigen Eigenvektoren zu einem bestimmten Eigenwert.
Immer gilt: algebraische Vielfachheit $\geq$ geoetrische Vielfachheit
Der Eigenvektor $\overrightarrow{x_i}$ heißt auch $E_{\lambda_i}$ oder $E_i$

z. B.: $E_{\lambda_i} = E_i = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

### 4.6.3 Diagonalisierbarkeit

Voraussetzung: algebraische Vielfachheit muss gleich geometrischer Vielfachheit sein.

> Eine (n×n)-Matrix M heißt diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Matrix S gibt, so dass $S^{-1}MS$ eine Diagonalmatrix ($D$) ist.
>
> [Mathe-Mitschrift Ames]

Bestimmung von S: Zu jedem Eigenvektor von M eine Basis bestimmen und diese als Spalten einer Matrix schreiben. Diese Matrix ist $S$ und ist regulär.

Bsp.:

Sei $E_{\lambda_1} = E_1$ ein Eigenvektor von $M$: $E_{\lambda_1} = E_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis von $E_1$

### 4.6.4 Beispiel zu Eingenwerten/-vektoren und Diagonalisierbarkeit

Gegeben:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Berechnen der Eigenwerte:

$$\det(M - \lambda E) = \left| \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -8-\lambda \end{vmatrix} =$$

$-\lambda^3 + 12 \cdot \lambda - 16 = 0$
$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 2, \lambda_3 = -4$

Algebraische Vielfachheit von $\lambda_{1,2}$ ist zwei, weil doppelte Nullstelle, algebraische Vielfachheit von $\lambda_3$ ist eins.

HIER FEHLT NOCH ETWAS: Eigenvektoren und Diagonalmatrix

# 5 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

## 5.1 Lösung eines quadratischen $(n, n)$-LGS

Ist $Ax = b$ ein quadratisches LGS (A Matrix, x Vektor, b Ergebnisvektor) so hat das System...

- ...genau eine eindeutige Lösung wenn $detA \neq 0$ (A heißt regulär, wären die Spalten von $A$ Vektoren, wären diese linear unabhängig voneinander)
- ...unendlich viele Lösungen wenn $detA = 0$ (A heißt singulär, wären die Spalten von $A$ Vektoren, wären diese linear abhängig voneinander)

### 5.2 Lösung eines $(m, n)$-LGS

LGS mit m Zeilen und n Spalten. Aus $Ax = b$ wird zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix aufgestellt der Form $(A|c)$. Wenn...

- ...$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A|c) = r$ und $r = n$ gibt es genau eine eindeutige Lösung.
- ...$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A|c) = r$ und $r < n$ gibt es unendlich viele Lösungen mit $n-r$ Parametern.
- ...$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A|c)$ gibt es keine Lösung.

## 6 Folgen und Konvergenz

### 6.1 Folge der Binominialkoeffizienten

Die Folge der Binominialkoeffizienten wird mit $\binom{a}{k}$ bezeichnet (Sprich: "a über k" oder "k aus a") und ist wie folgt definiert:

Für $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot (a-(k-1))}{k!}$

Ist auch $a \in \mathbb{N}$ gilt für $a < k$: $\binom{a}{k} = 0$, und für $a \geq k$: $\binom{a}{k} = \frac{a!}{k! \cdot (a-k)!}$

> Eine wichtige Anwendung des Binominialkoeffizienten ist der so genannte Bionomische Satz:
> Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:
>
> $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$
>
> z. B. erste Binomische Formel (beachte $0! = 1$):
>
> $$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^k \cdot b^{2-k} = \underbrace{\underbrace{\binom{2}{0} a^0 \cdot b^{2-0}}_{1 \cdot 1 \cdot b^2} + \underbrace{\binom{2}{1} a^1 \cdot b^{2-1}}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{\binom{2}{2} a^2 \cdot b^{2-2}}_{1 \cdot a^2 \cdot b^0}}_{=a^2+2ab+b^2}$$
>
> [Mathe-Mitschrift Ames]

#### 6.1.1 Beispiele zum Binominialkoeffizienten

$\binom{3}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1)}{5!} = 0$

$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2!} = 15$

$\binom{99}{1} = \frac{99!}{1! \cdot (99-1)!} = \frac{99 \cdot 98!}{98!} = 99$

$\binom{99}{98} = \frac{99!}{98! \cdot (99-98)!} = \frac{99 \cdot 98!}{98!} = 99$

Ein weiteres Beispiel ist ist Lotto "6 aus 49":

$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot (49-6)!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13.983.816$

Beispiele entnommen aus: [Mathe-Mitschrift Ames]

# 7 Funktionen

## 7.1 Symmetrieverhalten

### 7.1.1 Gerade Funktionen

Eine Funktion heißt gerade wenn sie symmetrisch zur y-Achse ist. Dann gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

### 7.1.2 Ungerade Funktionen

Eine Funktion heißt ungerade wenn sie symmetrisch zum Ursprung ist. Dann gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

## 7.2 Grenzwerte

### 7.2.1 Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

# 8 Differentialrechnung bzw. Differenzialrechnung

## 8.1 Differenzenquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

## 8.2 Ableitungen elementarer Funktionen

| | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| Potenzfunktionen | $x^n$ | $n \cdot x^{n-1}$ |
| Trigeometrische Funktionen | $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| | $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| | $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ |
| Arkusfunktionen | $\arcsin(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| | $\arccos(x)$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| | $\arctan(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| Exponentialfunktionen | $e^x$ | $e^x$ |
| | $a^x$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| Logarithmusfuktionen | $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| | $\log_a x$ | $\frac{1}{\ln a \cdot a^x}$ |
| Hyperbelfunktionen | $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| | $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ |
| | $\tanh(x)$ | $\frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$ |

## 8.3 Ableitungsregeln

### 8.3.1 Summenregel

$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \Rightarrow f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$

### 8.3.2 Produktregel

$u(x) \cdot v(x) \Rightarrow u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

### 8.3.3 Quotientenregel

$\frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$

### 8.3.4 Kettenregel

$f(u(x)) \Rightarrow f'(u) \cdot u'(x)$

Beispiel:
$g(x) = (f(u(x))) = 5 \cdot \cos(x^2 + 2x + 2)$
$f(u) = 5 \cdot \cos(u(x)) \Rightarrow$ "Äußere Ableitung" $f'(u) = -5 \cdot \sin(u(x))$
$u(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow$ "Innere Ableitung" $u'(x) = 2x + 2$
Mit $f'(u(x)) \cdot u'(x) \Rightarrow g'(x) = -5 \cdot \sin(x^2 + 2x + 2) \cdot (2x + 2)$

### 8.3.5 Ableitung der Umkehrfunktion

Ist $f(x)$ eine umkehrbare Funktion ($y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$) gelten folgende Beziehnungen:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

# 9 Partialbruchzerlegung

## 9.1 Beispiel für einen Ansatz

Wenn der Nenner in Nullstellen zerlegt folgendermaßen aussieht ergibt sich folgender Ansatz:

Nenner: $(x + 2)(x - 1)^3(x^2 + 3)^3(x^2 + 5)$

$$\Rightarrow \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3} + \frac{Ex+F}{(x^2+3)} + \frac{Gx+H}{(x^2+3)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+3)^3} + \frac{Kx+L}{(x^2+5)}$$

# 10 Integralrechnung

## 10.1 Integration elementarer Funktionen

| | |
|---|---|
| $\int x^n dx$ | $\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$ |
| $\int \frac{1}{x} dx$ | $\ln \lvert x \rvert$ |
| $\int \sin x dx$ | $-\cos x$ |
| $\int \cos x dx$ | $\sin x$ |
| $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ | $\arctan x$ |
| $\int e^x dx$ | $e^x$ |
| $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ | $\arcsin x$ |
| $\int \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ | $\arccos x$ |
| $\int \ln(x) dx$ | $x \cdot \ln(x) - x$ |
| $\int \frac{A}{x-a} dx$ | $A \cdot \ln \lvert x - a \rvert$ |
| $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$ | $-\frac{A}{n+1}(x-a)^{-n+1} = -\frac{A}{n+1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}}$ |
| $\int \frac{Cx+D}{x^2+cx+d} dx$ | ... |
| $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ | $\ln \lvert f(x) \rvert$ |

## 10.2 Integrationsverfahren

### 10.2.1 Integration durch Substitution

Beispiel:

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$; Substituiere $1 + x^4 = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \cdot x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{4 \cdot x^3}$
Einsetzten: $\int \frac{x^3}{\sqrt{u}} \frac{du}{4 \cdot x^3} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{u}$ mit $u = 1 + x^4 \Rightarrow \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^4}$

### 10.2.2 Integration durch Partielle Integration

Satz:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

## Literatur

[Mathe-Mitschrift Ames] 1. Semester, Wintersemester 2007-2008